Лекция 10 ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Функции одной независимой переменной не охватывают все зависимости, существующие в природе. Поэтому естественно расширить известное понятие функциональной зависимости и ввести понятие функции нескольких переменных.

Будем рассматривать функции двух переменных, так как все важнейшие факты теории функций нескольких переменных наблюдаются уже на функциях двух переменных. Эти факты обобщаются на случай большего числа переменных. Кроме того, для функций двух переменных можно дать наглядную геометрическую интерпретацию.

§ 1 Функции двух переменных

п. 1 Основные понятия

Пусть задано множество D упорядоченных пар чисел $(x;y)$. Соответствие f, которое каждой паре чисел $(x;y)\in D$ сопоставляет одно и только одно число $z\in R$, называется функцией двух переменных, определенной на множестве D со значением в R, и записывается в виде $z=f(x;y)$ или $f:D\to R$. При этом x и y называются независимыми переменными (аргументами), а z - зависимой переменной (функцией).

Множество $D=D(f)$ называется областью определения функции. Множество значений, принимаемых z в области определения, называется областью изменения этой функции, обозначается $E(f)$ или E.

Примером функции двух переменных может служить площадь S прямоугольника со сторонами, длины которых равны x и $y: S=xy$. Областью определения этой функции является множество $\{(x;y), x>0, y>0\}$

Функцию $z=f(x;y)$, где $(x;y)\in D$ можно понимать (рассматривать) как функцию точки $M(x;y)$ координатной плоскости *Oxy*. В частности областью определения может быть вся плоскость или ее часть, ограниченная некоторыми линиями. Линию, ограничивающую область, называют границей области. Точки области, не лежащие на границе, называются внутренними. Область, состоящая из одних внутренних точек, называется открытой. Область с присоединенной к ней границей называется замкнутой, обозначается $\overline{D}$. Примером замкнутой области является круг с окружностью.

Значение функции $z=f(x;y)$ в точке $M_0(x_0;y_0)$ обозначают $z_0=f(x_0;y_0)$ или $z_0=f(M_0)$ и называют частным значением функции. Функция двух независимых переменных допускает геометрическое истолкование. Каждой точке $M_0(x_0;y_0)$ области D в системе координат Oxy соответствует точка $M(x_0;y_0;z_0)$, где $z_0=f(x_0;y_0)$- аппликата точки M. Совокупность всех таких точек представляет собой некоторую поверхность, которая и будет геометрически изображать данную функцию.

Например, функция $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ имеет область определения круг $x^2+y^2\le 1$ и изображается верхней полусферой с центром в точке O$(0;0;0)$ и радиусом R=1 (см. рис. 205).

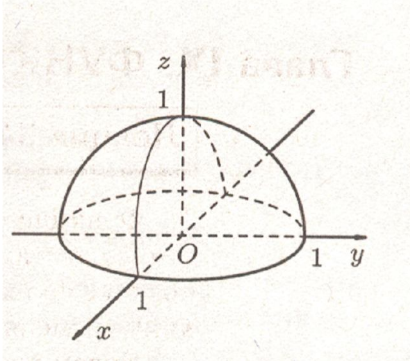

Рис. 205.

Функция двух переменных, как и функция одной переменной, может быть задана разными способами: таблицей, аналитически, графиком. Будем пользоваться, как правило, аналитическим способом: когда функция задается с помощью формулы.

п.2 Предел функции

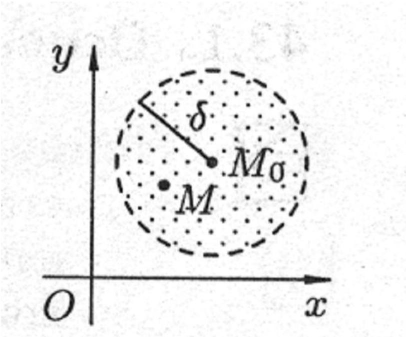

Рис. 206.

Для функции двух (и большего числа) переменных вводится понятие предела функции и непрерывности, аналогично случаю функции одной переменной. Введем понятие окрестности точки. Множество всех точек M$(x;y)$ плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$, называется δ-окрестностью точки M$_0(x_0;y_0)$. Другими словами δ-окрестность точки M$_0$-это все внутренние точки круга с центром M$_0$ и радиусом δ (см. рис. 206).

Пусть функция $z=f(x;y)$ определена в некоторой окрестности точки M$_0(x_0;y_0)$, кроме быть может самой этой точки. *Число A называется пределом* функции $z=f(x;y)$ при $x\to x_0$ и $y\to y_0$ (или, что то же самое, при $M(x;y)\to M_0(x_0;y_0)$), если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$, такое, что для всех $x\ne x_0$ и $y\ne y_0$ и удовлетворяющих неравенству $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ выполняется условие $|f(x;y)-A|<\varepsilon$. Записывают:

$$\boxed{A=\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x;y) \text{ или } A=\lim_{M\to M_0} f(M)}$$

Из определения следует, что если предел существует, то он не зависит от пути, по которому M стремится к M$_0$ (число таких направлений бесконечно; для функции одной переменной $x\to x_0$ по двум направлениям: справа и слева!)

Геометрический смысл предела функции двух переменных состоит в следующем. Каково бы ни было число $\varepsilon>0$, найдется δ - окрестность точки M$_0(x_0;y_0)$, что во всех ее точках M$(x;y)$, отличных от M$_0$, аппликаты соответствующих точек поверхности $z=f(x;y)$ отличаются от числа A по модулю меньше, чем на ε.

Пример 43.1. Найти предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

Решение: Будем приближаться к $O(0;0)$ по прямой $y = kx$, где k - некоторое число. Тогда $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2 - k^2x^2}{x^2 + k^2y^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-k^2}{1+k^2} = \dfrac{1-k^2}{1+k^2}$.

Функция $z = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ в точке $O(0;0)$ предела не имеет, т.к. при разных значениях k предел функции не одинаков (функция имеет различные предельные значения).

Предел функции двух переменных обладает свойствами, аналогичными свойствам предела функции одной переменной (см. п. 17.3). Это означает, что справедливы утверждения: если функции $f(M)$ и $g(M)$ определены на множестве D и имеют в точке M_0 этого множества пределы A и B соответственно, то и функции $f(M) \pm g(M)$, $f(M)\cdot g(M)$, $\dfrac{f(M)}{g(M)}, (g(M) \neq 0)$ имеют в точке M_0 пределы, которые соответственно равны $A \pm B, A\cdot B, \dfrac{A}{B} (B \neq 0)$.

п.3 Непрерывность функции двух переменных

Функция $z = f(x;y)$ (или $f(M)$) называется непрерывной в точке $M_0(x_0;y_0)$, если она:

а) определена в этой точке и некоторой ее окрестности

б) имеет предел $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)$,

в) этот предел равен значению функции z в точке M_0, т.е.

$$\lim_{M\to M_0} f(M) = f(M_0) \text{ или } \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x;y) = f(x_0;y_0).$$

Функция, непрерывная в каждой точке некоторой области, называется непрерывной в этой области. Точки, в которых непрерывность нарушается (не выполняется хотя бы одно из условий непрерывности функции в точке), называются точками разрыва этой функции. Точки разрыва $z = f(x;y)$ могут образовать целые линии разрыва. Так функция $z = \dfrac{2}{y-x}$ имеет линию разрыва $y = x$.

Можно дать другое, равносильное приведенному выше, определение непрерывности функции $z = f(x;y)$ в точке. Обозначим $\Delta x = x - x_0, \Delta y = y - y_0, \Delta z = f(x;y) - f(x_0;y_0)$. Величины Δx и Δy называются приращениями аргументов x и y, а Δz - полным приращением функции $f(x;y)$ в точке $M_0(x_0;y_0)$.

Функция $z = f(x;y)$ называется непрерывной в точке $M_0(x_0;y_0) \in D$, если выполняется равенство $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \Delta z = 0$, т.е. полное приращение функции в этой точке стремится к нулю, когда приращения ее аргументов x и y стремятся к нулю.

Пользуясь определением непрерывности и теоремами о пределах, можно доказать, что арифметические операции над непрерывными функциями и построение сложной функции из непрерывных функций приводит к непрерывным функциям подобные теоремы имели место для функций одной переменной. (см. п. 19.4).

п.4. Свойства функций, непрерывных в ограниченной замкнутой области

Приведем свойства функций, непрерывных в ограниченной замкнутой области (они аналогичны свойствам непрерывных на отрезке функций одной переменной – см. п. 19.5). Предварительно уточним понятие области.

Областью называется множество точек плоскости, обладающих свойствами открытости и связности.

Свойство открытости: каждая точка принадлежит ей вместе с некоторой окрестностью этой точки.

Свойство связности: любые две точки области можно соединить непрерывной линией, целиком лежащей в этой области.

Точка N_0 называется граничной точкой области D, если она не принадлежит D, но в любой окрестности ее лежат точки этой области. Совокупность граничных точек области D называется границей D. Область D с присоединенной к ней границей называется замкнутой областью, обозначается D. Область называется *ограниченной*, если все ее точки принадлежат некоторому кругу радиуса R. В противном случае область называется *неограниченной*. Примером неограниченной области может служить множество точек первого координатного угла, а примером ограниченной — δ-окрестность точки $M_0\,(x_0; y_0)$.

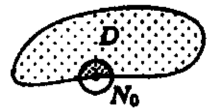

Рис. 207

Теорема 43.1. Если функция $z = f(N)$ непрерывна в ограниченной замкнутой области, то она в этой области: а) ограничена, т. е. существует такое число $R > 0$, что для всех точек N в этой области выполняется неравенство $|f\,(N)| < R$; б) имеет точки, в которых принимает наименьшее m и наибольшее M значения; в) принимает хотя бы в одной точке области любое численное значение, заключенное между m и M.

Теорема дается без доказательства.